ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА, СВЯЗАННОГО С ИССЛЕДОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

И. КЛЕЙЗА

Vilnius Technical University
11 Sauletekio ave
2054 Vilnius, Lithuania

Рассматривается интеграл

$$A(\alpha;x)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1-xt)^{\alpha-1}dt, \qquad \alpha,x\in(0;1), \tag{1}$$

который с одной стороны есть частный случай гипергеометрической функции F :

$$A(\alpha;x)=\pi/\sin(\pi\alpha)F(\alpha;1-\alpha;1;x),$$

а с другой стороны, является обобщением эллиптическкого интеграла 1 рода K :

$$K(x)=0.5A(1/2;x).$$

С интегралом (1) связаны задачи расчета величины элктрического тока I, протекающего между двумя электродами плоской проводящей области, помещенной в агнитном поле. Именно [2]

$$I=\frac{Vd}{p}\frac{A(\alpha;x)}{A(\alpha;1-x)}\sin\pi\alpha,$$

где V –разность потенциалов, p –удельное сопротивление, d –толщина пластинки. Смысл параметров интеграла (1) следующий: α является некоторой функцией величины приложенного магнитного поля, x –характеризует геометрическую форму области и расположение токовых электродов на ней. Обычно α и x неизвестны заранее и их можно найти из системы уравнений, коэффициенты которой являются токи I, измеренные в результате физического эксперимента.

Вообще говоря, интеграл (1) появляется в исследовании всех задач, связанных с рассмотрением протекания электрического тока в плоских двухэлектродных анизотропно проводящих средах [3, 4, 5].

В комплексной области интеграл (1) с переменным верхним пределом отображает полуплоскость на параллелограмм с внутренним углом $\pi\alpha$ и сторонами a и b. Здесь, как правило, возникает задача определения такого отображения, т.е. неизвестного параметра x, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{A(\alpha;x)}{A(\alpha;1-x)}=\frac{a}{b}.$$

При решении перечисленных выше задач приходится неоднократно прибегать к численному расчету $A(\alpha;x)$. Известно [1], что при малых значениях x выполнить этот расчет достаточно просто, ибо интеграл можно разложить в быстро сходящийся ряд. Однако, при $x=1$ интеграл расходится и для его расчета в окрестности $x=1$ с высокой степенью точности требуется применять специальные методы.

Приведем полученные формулы численного расчета интеграла $A(\alpha;x)$ и оценку погрешности. Сначала определим последовательности (p –некоторая целая константа):

$$a_0=\pi/\sin(\pi\alpha),\ \ a_n=a_{n-1}(1-1/n+\beta/n^2),\ n=1,2,...,3p,\ \beta=\alpha-\alpha^2,$$

$$b_1=1/(3p+1),\ \ b_n=b_{n-1}(n-1)/(3p+n),\ n=2,3,...,p,$$

$$c_1=\beta,\ c_n=c_{n-1}-\beta/((n-1)n)\sum_{i=1}^{n-1}c_i;\quad n=2,3,\dots,p,$$

$$d_n=c_n/n,\quad n=1,2,\dots,p,$$

$$e_p=d_p,\ e_n=d_n-ue_{n+1};\quad n=p-1,p-2,\dots,1;\ u=1/x-1.$$

Тогда с абсолютной погрешностью не превосходящей 10^{-p} ($1\le p\le 18$) будем иметь

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1-xt)^{\alpha-1}dt=\sum_{n=0}^{3p}a_n x^n-R_p,$$

где

$$R_p=\begin{cases}0, & x\in[0;\,0.5]\\ (1+ue_1)\left(\ln(1-x)+\sum_{n=1}^{3p}x^n/n\right)+x^{3p}\sum_{i=1}^{3p}b_i e_i, & x\in(0.5;\,1).\end{cases}$$

Литература

1. М. Абромовиц и И. Стиган. Справочник по специальным функциям // М.: " Наука '.' 1979.
2. J. Kleiza, V. Kleiza. Investigation of the Hall effect in samples of an arbitrary form with contacts of non−zero length // Lietuvos fizikos žurnalas, 1993, 33,№ 3, 163−171 p.
3. В. Клейза, И. Клейза, Р. Жилинскас. Определение тензора проводимости плоской фнизотропной среды // ДАН СССР, 1991, т.320, № 5, 1093−1096.
4. В. Клейза, И. Клейза. Метод расчета тензора проводимости // ДАН СССР, 1992, т.325, № 4, 711−715.
5. Ю. П. Емец. Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред // Киев, 1987, 254 с.