

MIXED AND COMPATIBLE FINITE ELEMENTS IN THE ANALYSIS PROBLEM OF ELASTOPLASTIC STRUCTURES

S. Kalanta

To cite this article: S. Kalanta (1996) MIXED AND COMPATIBLE FINITE ELEMENTS IN THE ANALYSIS PROBLEM OF ELASTOPLASTIC STRUCTURES, *Statyba*, 2:5, 29-43, DOI: [10.1080/13921525.1996.10531546](https://doi.org/10.1080/13921525.1996.10531546)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1996.10531546>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 66

СМЕШАННЫЕ И СОВМЕСТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

С. Каланга

1. Введение

Общие математические модели задач анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) и оптимизации упругопластического тела разработаны в [1,2]. Настоящая статья посвящена совершенствованию и развитию двойственных конечноэлементных математических моделей задач анализа НДС в состоянии до пластического разрушения. Соблюдение двойственных связей статических и геометрических уравнений позволяет упростить математические модели и алгоритмы решения задач [3]. Это особенно важно для задач оптимизации при ограниченных перемещениях. Обычно в двойственных формулировках задач [4–6 и др.] проблема учета возможных разрывов перемещений не рассматривается, т.е. негласно принимается предположение о неразрывности полей перемещений, которое не всегда соответствует действительному состоянию упругопластических конструкций. Разрывы скоростей перемещений обычно учитываются только в кинематической постановке задач предельной нагрузки [7–9 и др.], построенных на основе кинематической теоремы предельного равновесия независимо от статической постановки (двойственность не соблюдается). Условия неразрывности перемещений принимаются даже в некоторых кинематических конечноэлементных постановках задач. Однако такие постановки непригодны для анализа конструкций, в которых образуются поверхности сосредоточенных пластических деформаций.

В работах [3,10] построены общие двойственные математические модели задач анализа НДС и оптимизации упругопластических конструкций с учетом возможных разрывов перемещений. На основе этих исследований в [3] построены двойственные равновесные конечноэлементные постановки задач анализа. Они позволяют определить верхние оценки напряжений и перемещений. Однако на основе смешанного энергетического функционала с применением смешанных конечных элементов и метода преобразований Лагранжа можно построить и вторую пару двойственных конечноэлементных математических моделей задачи. Вместе с равновесными моделями они позволили бы осуществить двухсторонний анализ и оценить точность численных результатов расчета упругопластических конструкций. Построение совместных и смешанных конечноэлементных математических моделей задачи анализа НДС, учитывающих возможные разрывы перемещений, и является основной целью настоящих исследований.

2. Общие математические модели

Рассматривается тело (обобщенная модель конструкции), геометрические и физические параметры, условия опирания и функция $C(x)$ параметра текучести которого заданы. Тело подвергается действию внешней нагрузки $F(x)$, распределенной на поверхности S_f , а также начальных деформаций $\epsilon_0(x)$ и перемещений $u_0(x)$, заданных в объеме V и на поверхности S_u

соответственно. Дискретная модель тела строится расчленением его на s конечных элементов объема V_k . Напряженно-деформированное состояние k -го элемента описывается вектор-функциями напряжений $\sigma_k(\mathbf{x})$, перемещений $\mathbf{u}_k(\mathbf{x})$ и деформаций $\epsilon_k(\mathbf{x})$. Функции, относящиеся к смежным конечным элементам, разделенным поверхностью S_t , обозначаются знаками "+" и "-". Пусть номера конечных элементов $k = 1, 2, \dots, s$ образуют множество \mathcal{K} , а совокупность номеров поверхностей S_t конечных элементов – множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_f \cup \mathcal{F}_u$, где \mathcal{F}_i – множество номеров внутренних межэлементных поверхностей; $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_u$ – множества номеров граничных, принадлежащих S_f и S_u , поверхностей элементов. Пусть $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_f$.

Рассмотрим задачи определения полных и остаточных параметров НДС тела. Для построения математической модели смешанной постановки задач воспользуемся теоремой о минимуме дополнительной энергии. В терминах полных напряжений она выражается следующей задачей квадратичного программирования [3]:

$$\sum_k \frac{1}{2} \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) [d_k] \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k + \sum_k \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) \epsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k - \sum_{t \in \mathcal{F}_i, S_u} \int \mathbf{u}_{0t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) dS_t \rightarrow \min$$

при условиях (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) &\geq \mathbf{0} \in V_k, & \mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) &\geq \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{F}; \\ -[\mathcal{A}] \sigma_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0} &\in V_k, \quad k \in \mathcal{K}; & [A_t] \sigma_t(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0} &\in S_f, S_u, \quad t \in \mathcal{F}_f, \mathcal{F}_u; & \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) \in S_f, \\ [A_t] \sigma_t^+(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & -[A_t] \sigma_t^-(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{F}_i. \end{aligned}$$

Здесь $[\mathcal{A}], [A_t]$ – операторы дифференциальных условий равновесия, статических граничных условий и условий сопряжения конечных элементов; $[d_k]$ – матрица податливости элементарного объема k -го элемента. Неравенства представляют собой условия текучести конечных элементов и их поверхностей, а равенства – условия равновесия в объеме элементов и между элементами.

Используя метод множителей Лагранжа и формулу Гаусса–Остроградского, задачу анализа полных напряжений (1) преобразуем в задачу стационарности смешанного функционала:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \sum_k \frac{1}{2} \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) [d_k] \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k + \sum_k \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) \epsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k - \sum_k \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) [\mathcal{A}]^T \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) dV_k + \\ & + \sum_{t \in \mathcal{F}_f, S_f} \int \left\{ \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}) \right\}^T \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS + \sum_{t \in \mathcal{F}_i, S_i} \int \mathbf{p}_t^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}) \right\} dS_t + \sum_{t \in \mathcal{F}_i, S_u} \int \mathbf{p}_t^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{0t}(\mathbf{x}) \right\} dS_t - \\ & - \sum_k \int_{V_k} \lambda_k^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) \right\} dV_k - \sum_{t \in \mathcal{F}_i, S_i} \int \lambda_t^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) \right\} dS_t \rightarrow \text{stac} \end{aligned}$$

(2)

при условиях $\lambda_k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in V_k, \quad k \in \mathcal{K}; \quad \lambda_t(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{F}.$

Условиями стационарности этого функционала по переменным $\sigma_k(\mathbf{x})$ и $\mathbf{p}_t(\mathbf{x})$ являются уравнения:

$$\begin{aligned} [d_k] \sigma_k(\mathbf{x}) + \epsilon_{0k}(\mathbf{x}) + [\nabla \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))]^T \lambda_k(\mathbf{x}) - [\mathcal{A}]^T \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in V_k, \quad k \in \mathcal{K}; \\ [\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))]^T \lambda_t(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{F}_i; \\ [\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))]^T \lambda_t(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{0t}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{F}_u. \end{aligned}$$

(3)

Они представляют собой геометрические уравнения конечных элементов, условия совместности перемещений на поверхностях S_t и кинематические граничные условия. Здесь $[\nabla \mathbf{f}]$ – матрицы

градиентов функций текучести. Пятый и шестой интегралы функционала \mathcal{F} выражают энергию диссипации на поверхностях S_t .

Для кинематически возможных функций перемещений, удовлетворяющих условиям (3), функционал \mathcal{F} , умноженный на -1 , выражает полную энергию деформаций упругопластического тела. Поэтому задача стационарности (2) может быть преобразована в следующую задачу:

$$-\sum_k \frac{1}{2} \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) [d_k] \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k - \sum_k \int_{V_k} \lambda_k^T(\mathbf{x}) [\nabla \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))] \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k - \sum_{t \in \mathcal{F}} \int_{S_t} \lambda_t^T(\mathbf{x}) [\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))] \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) dS_t + \\ + \sum_{t \in \mathcal{F}_r} \int_{S_r} \{\mathbf{u}_t^-(\mathbf{x})\}^T \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS - \sum_k \int_{V_k} \lambda_k^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) \} dV_k - \sum_{t \in \mathcal{F}} \int_{S_t} \lambda_t^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) \} dS_t \rightarrow \max$$

при условиях (3) и $\lambda_k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in V_k, k \in \mathcal{K}; \lambda_t(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in S_t, t \in \mathcal{F}$. Она отвечает теореме о минимуме полной энергии деформаций [3] и, как и задача (2), позволяет определить распределение напряжений и перемещений в состоянии до пластического разрушения тела. Неизвестными в ней являются статические и кинематические величины. Поэтому она называется общей математической моделью смешанной постановки задачи анализа НДС.

Если в качестве основных неизвестных после предварительного решения задачи теории упругости принять остаточные перемещения и напряжения, то вариационная постановка задачи анализа упругопластической конструкции представляется задачей стационарности функционала:

$$\mathcal{F}_* = \sum_k \frac{1}{2} \int_{V_k} \sigma_{rk}^T(\mathbf{x}) [d_k] \sigma_{rk}(\mathbf{x}) dV_k - \sum_k \int_{V_k} \sigma_{rk}^T(\mathbf{x}) [\mathcal{E}]^T \mathbf{u}_{rk}(\mathbf{x}) dV_k + \\ + \sum_{t \in \mathcal{F}_r} \int_{S_r} \mathbf{p}_r^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{u}_r^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_r^-(\mathbf{x}) \} dS_t + \sum_{t \in \mathcal{F}_w} \int_{S_w} \mathbf{p}_w^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}_w^+(\mathbf{x}) dS - \sum_k \int_{V_k} \lambda_k^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\sigma_{ek}(\mathbf{x}) + \sigma_{rk}(\mathbf{x})) \} dV_k - \\ - \sum_{t \in \mathcal{F}} \int_{S_t} \lambda_t^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_{et}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_r(\mathbf{x})) \} dS_t \rightarrow \text{stac}$$

при условиях

$$\lambda_k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in V_k, k \in \mathcal{K}; \quad \lambda_t(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in S_t, t \in \mathcal{F}, \quad (4)$$

которая может быть преобразована в задачу минимизации полной энергии остаточных деформаций при ограничениях, определяющих область кинематически возможных функций перемещений. Здесь индексом e обозначены параметры упругого расчета конструкции, а индексом r – остаточные параметры. Третий и четвертый члены функционала \mathcal{F}_* выражают энергию диссипации на пластических поверхностях конечных элементов. Представленные вариационные постановки далее используются для построения двойственной пары дискретных математических моделей задач.

3. Дискретные математические модели

3.1. Задача анализа полных перемещений и напряжений

Аппроксимирующие функции. Для дискретизации задачи (2) применяются смешанные конечные элементы. Выбираются аппроксимирующие функции

$$\sigma_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\xi} [H_{ki}(\mathbf{x})] \sigma_{ki} = [H_k(\mathbf{x})] \sigma_k, \quad \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = [H_t(\mathbf{x})] \mathbf{p}_t, \quad \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = [H_{uk}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_k, \quad (5)$$

$$\lambda_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\xi} [H_{\lambda ki}(\mathbf{x})] \lambda_{ki} = [H_{\lambda k}(\mathbf{x})] \lambda_k, \quad \lambda_t(\mathbf{x}) = [H_{\lambda t}(\mathbf{x})] \lambda_t, \quad C_k(\mathbf{x}) = [H_{0k}(\mathbf{x})] C_k. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{C}_k, \lambda_k$ – векторы напряжений, перемещений, параметров текучести и пластических множителей узловых точек k -го элемента. Матрицы функций формы $[H_{uk}(\mathbf{x})], [H_k(\mathbf{x})]$ и векторы \mathbf{u}_k, σ_k обобщенных перемещений и напряжений должны быть построены так, чтобы при равенстве узловых перемещений и напряжений смежных конечных элементов соблюдалась неразрывность функций перемещений и напряжений и другие требования сходимости [11].

Смешанные постановки задачи. После подстановки функций (5),(6) задача (2) получает следующий дискретный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I = & \sum_{t \in \mathcal{F}_I} (\mathbf{u}_t^-)^T \mathbf{F}_t + \sum_k \frac{1}{2} \sigma_k^T [D_k] \sigma_k + \sum_k \sigma_k^T \varepsilon_{0k} - \sum_k \sigma_k^T [A_k]^T \mathbf{u}_k + \sum_{t \in \mathcal{F}_I} \mathbf{p}_t^T [A_{vt}]^T (\mathbf{u}_t^+ - \mathbf{u}_t^-) + \\ & + \sum_{t \in \mathcal{F}_I} \mathbf{p}_t^T [A_{ut}]^T (\mathbf{u}_t^+ - \mathbf{u}_{0t}) - \sum_k \lambda_k^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}_k) - \mathbf{f}_k(\sigma_k) \} - \sum_{t \in \mathcal{F}} \lambda_t^T \{ \mathbf{f}_{0t}(\mathbf{C}_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t) \} \rightarrow \text{stac} \end{aligned} \quad (7)$$

при условиях $\lambda_k \geq \mathbf{0}, k \in \mathcal{K}; \quad \lambda_t \geq \mathbf{0}, t \in \mathcal{F}.$

Здесь векторы внешних узловых сил, взвешенных начальных деформаций

$$\mathbf{F}_t = \int_{S_t} [H_{ut}(\mathbf{x})]^T \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS_t, \quad \varepsilon_{0k} = \int_{V_k} [H_k(\mathbf{x})]^T \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k \quad (8)$$

и функций текучести конечного элемента

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\sigma_k) &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) dV_k, & \mathbf{f}_{0k}(\mathbf{C}_k) &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_0(\mathbf{C}_k(\mathbf{x})) dV_k, \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t) &= \int_{S_t} [H_{\lambda t}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) dS_t, & \mathbf{f}_{0t}(\mathbf{C}_t) &= \int_{S_t} [H_{\lambda t}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_{0t}(\mathbf{C}_t(\mathbf{x})) dS_t. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица податливости элемента

$$[D_k] = \int_{V_k} [H_k(\mathbf{x})]^T [d_k] [H_k(\mathbf{x})] dV_k \quad (10)$$

и матрицы

$$[A_k]^T = \int_{V_k} [H_k(\mathbf{x})]^T [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] dV_k, \quad [A_{vt}]^T = \int_{S_t} [H_t(\mathbf{x})]^T [H_{vt}(\mathbf{x})] dS_t. \quad (11)$$

Условие стационарности функционала \mathcal{F}_I по переменным σ_k и \mathbf{p}_t позволяет получить геометрические уравнения конечных элементов и условия совместности перемещений между конечными элементами и на граничной поверхности тела. Принимая их за предварительные условия, задачу определения стационарной точки функционала \mathcal{F}_I преобразуем в задачу минимизации полной энергии:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{F} - \frac{1}{2} \sigma^T [D] \sigma - \lambda^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \sigma - \lambda_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})] \mathbf{p} - \lambda^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \} - \lambda_p^T \{ \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \} \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} [D] \sigma + [\nabla \mathbf{f}(\sigma)]^T \lambda - [A]^T \mathbf{u} &= -\varepsilon_0, & \lambda &\geq \mathbf{0}; \\ [\nabla \mathbf{f}_v(\mathbf{p}_v)]^T \lambda_v - [A_v]^T \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \lambda_v &\geq \mathbf{0}; \\ [\nabla \mathbf{f}_u(\mathbf{p}_u)]^T \lambda_u + [A_u]^T \mathbf{u} &= [A_u]^T \mathbf{u}_0, & \lambda_u &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $[D], [A], [\nabla \mathbf{f}(\sigma)]$ – алгебраические матрицы, диагональными блоками которых являются матрицы $[D_k], [A_k]$ и $[\nabla \mathbf{f}_k(\sigma_k)]$ соответственно. Векторы $\mathbf{u}, \mathbf{F}, \sigma, \varepsilon_0$ составляет совокупность векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{F}_k, \sigma_k$ и ε_{0k} , $k=1,2,\dots,s$. Составляющими векторов $\lambda_p \equiv \{\lambda_v, \lambda_u\}^T$ и $\mathbf{p} \equiv \{\mathbf{p}_v, \mathbf{p}_u\}^T$ являются векторы пластических множителей λ_i и напряжений \mathbf{p} , всех поверхностей конечных элементов.

Если начальные перемещения отсутствуют, т. е. $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, то кинематические граничные условия удобно учитывать исключением нулевых составляющих вектора перемещений и соответствующих столбцов матриц геометрических уравнений. Тогда уравнения совместности перемещений можно объединить. В этом случае получаем следующую математическую модель задачи:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{F} - \frac{1}{2} \sigma^T [D] \sigma - \lambda^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \sigma - \lambda_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})] \mathbf{p} - \lambda^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \} - \lambda_p^T \{ \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \} \rightarrow \max$$

при условиях

(13)

$$\begin{aligned} [D] \sigma + \varepsilon_0 + [\nabla \mathbf{f}(\sigma)]^T \lambda - [A]^T \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \lambda &\geq \mathbf{0}; \\ [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})]^T \lambda_p - [A_p]^T \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \lambda_p &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Неизвестными в задачах (12) и (13) являются векторы напряжений, перемещений и пластических множителей. Как известно, трудоемкость и время, необходимое для решения задачи математического программирования, в первую очередь зависят от числа неизвестных. Поэтому всегда необходимо стремиться уменьшить число неизвестных задачи. Если геометрические уравнения конечных элементов линейны, то напряжения можно выразить через деформации и исключить из числа неизвестных. Такой случай рассматривается в пятом разделе статьи. Если же эти уравнения нелинейны и необратимы, то такая возможность не существует. Однако и в этом случае можно уменьшить число неизвестных задачи путем исключения перемещений.

Систему ограничений полной дополнительной энергии в задачах (12) и (13) можно представить одним матричным уравнением

$$[\tilde{D}] \sigma + [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\sigma, \mathbf{p})]^T \tilde{\lambda} - [\tilde{A}]^T \mathbf{u} = \tilde{\varepsilon}_0, \quad \tilde{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (14)$$

где

$$[\tilde{D}] = \begin{bmatrix} [D] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix}, \quad [\tilde{A}]^T = \begin{bmatrix} [A]^T \\ [A_v]^T \\ -[A_u]^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} -\varepsilon_0 \\ \mathbf{0} \\ [A_u]^T \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}, \quad [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\sigma, \mathbf{p})] = \begin{bmatrix} [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \\ [\nabla \mathbf{f}_v(\mathbf{p}_v)] \\ [\nabla \mathbf{f}_u(\mathbf{p}_u)] \end{bmatrix}.$$

Вектор $\tilde{\lambda} = \{\lambda, \lambda_v, \lambda_u\}^T$. Выбирая базисную матрицу $[\tilde{A}_1]^T$ и разделяя все матрицы и вектор $\tilde{\varepsilon}_0$ уравнения (14) на две части, получаем решение

$$\mathbf{u} = \left([\tilde{A}_1]^T \right)^{-1} \left\{ [\tilde{D}_1] \sigma + [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_1(\sigma, \mathbf{p})]^T \tilde{\lambda} - \tilde{\varepsilon}_{01} \right\} \quad (15)$$

и уравнение совместности деформаций

$$[B_\sigma] \sigma + [B_\lambda(\sigma, \mathbf{p})] \tilde{\lambda} = \Theta_0, \quad \tilde{\lambda} \geq \mathbf{0}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
[B_{\sigma}] &= [\tilde{D}_2] - [\tilde{A}_2]^T \left([\tilde{A}_1]^T \right)^{-1} [\tilde{D}_1], \quad \Theta_0 = \tilde{\varepsilon}_{02} - [\tilde{A}_2]^T \left([\tilde{A}_1]^T \right)^{-1} \tilde{\varepsilon}_{01}, \\
[B_{\lambda}(\sigma, \mathbf{p})] &= [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_2(\sigma, \mathbf{p})]^T - [\tilde{A}_2]^T \left([\tilde{A}_1]^T \right)^{-1} [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_1(\sigma, \mathbf{p})]^T.
\end{aligned} \tag{17}$$

Зависимость (15) позволяет исключить перемещения из числа неизвестных. Получается модифицированная математическая модель смешанной постановки задачи:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^T \left([\tilde{A}_1]^T \right)^{-1} \left\{ [\tilde{D}_1] \sigma + [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_1(\sigma, \mathbf{p})]^T \tilde{\lambda} - \tilde{\varepsilon}_{01} \right\} - \frac{1}{2} \sigma^T [D] \sigma - \lambda^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \sigma - \lambda_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})] \mathbf{p} - \\
- \lambda^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \} - \lambda_p^T \{ \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \} \rightarrow \max
\end{aligned} \tag{18}$$

при условиях (16).

Статические постановки задачи. Методом множителей Лагранжа смешанные постановки (12) и (13) могут быть преобразованы в двойственные к ним статические постановки задачи. Математическая модель статической постановки при наличии начальных перемещений имеет вид:

$$\frac{1}{2} \sigma^T [D] \sigma + \sigma^T \varepsilon_0 - \mathbf{p}_u^T [A_u]^T \mathbf{u}_0 \rightarrow \min \tag{19}$$

при условиях

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}, \quad [A] \sigma + [A_v] \mathbf{p}_v - [A_u] \mathbf{p}_u = \mathbf{F}.$$

Функция цели этой задачи выражает полную дополнительную энергию дискретного тела. Неравенства представляют собой условия текучести конечных элементов и межэлементных поверхностей, а равенства – уравнения равновесия конечноэлементной модели. Поэтому задача (19) отвечает минимальному принципу дополнительной энергии и позволяет определить нижние значения напряжений в конечных элементах, в том числе и на их поверхностях.

Математическая модель статической постановки задачи при отсутствии начальных перемещений:

$$\frac{1}{2} \sigma^T [D] \sigma + \sigma^T \varepsilon_0 \rightarrow \min \tag{20}$$

при условиях

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}, \quad [A] \sigma + [A_p] \mathbf{p} = \mathbf{F}.$$

Математические модели задачи при отсутствии начальных деформаций получаются исключением вектора начальных деформаций.

3.2. Задача анализа остаточных перемещений и напряжений

В тех случаях, когда конструкция подвергается действию разных воздействий или упругие параметры НДС известны или нетрудно могут быть определены, задачу упругопластического анализа конструкции удобно формулировать в терминах остаточных напряжений и перемещений. Дискретные математические модели задачи анализа остаточных параметров НДС строятся аналогично – путем дискретизации задачи (4).

Для каждого конечного элемента принимаются аппроксимирующие функции (6) и

$$\sigma_{rk}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\xi} [H_{ki}(\mathbf{x})] \sigma_{rki} = [H_k(\mathbf{x})] \sigma_{rk}, \quad \mathbf{p}_r(\mathbf{x}) = [H_t(\mathbf{x})] \mathbf{p}_r, \quad \mathbf{u}_{rk}(\mathbf{x}) = [H_{uk}(\mathbf{x})] \mathbf{u}_{rk}.$$

Подставляя эти функции в функционал задачи (4) и используя вышеописанную методичку, окончательно получаем следующую пару конечноэлементных математических моделей этой задачи:

а) в смешанной постановке –

$$-\frac{1}{2}\sigma_r^T[D]\sigma_r - \lambda^T[\nabla\mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r)]\sigma_r - \lambda_p^T[\nabla\mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r)]\mathbf{p}_r - \lambda^T\{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r)\} - \lambda_p^T\{\mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r)\} \rightarrow \max$$

при условиях

(21)

$$\begin{aligned} [D]\sigma_r + [\nabla\mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r)]^T\lambda - [A]^T\mathbf{u}_r &= \mathbf{0}, & \lambda &\geq \mathbf{0}; \\ [\nabla\mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r)]^T\lambda_p - [A_p]^T\mathbf{u}_r &= \mathbf{0}, & \lambda_p &\geq \mathbf{0}; \end{aligned}$$

б) в статической постановке –

$$\frac{1}{2}\sigma_r^T[D]\sigma_r \rightarrow \min$$

при условиях

(22)

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r) \geq \mathbf{0}, \quad [A]\sigma_r + [A_p]\mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Она выражает пару двойственных экстремальных принципов о минимуме полной энергии остаточных деформаций и о минимуме дополнительной энергии остаточных напряжений для конечноэлементной модели тела и позволяет определить нижние оценки остаточных перемещений и напряжений.

Модифицированная математическая модель смешанной постановки задачи:

$$-\frac{1}{2}\sigma_r^T[D]\sigma_r - \lambda^T[\nabla\mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r)]\sigma_r - \lambda_p^T[\nabla\mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r)]\mathbf{p}_r - \lambda^T\{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma_e + \sigma_r)\} - \lambda_p^T\{\mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_r)\} \rightarrow \max$$

при условиях

(23)

$$[B_\sigma]\sigma_r + [B_\lambda(\sigma, \mathbf{p})]\tilde{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

Построенные нами формальным путем математические модели (19) и (22) статической постановки задач анализа НДС ни по виду, ни по существу не отличаются от представленных в [3] статических постановок этих задач, построенных с применением равновесных конечных элементов. Разница состоит в происхождении матриц коэффициентов уравнений равновесия. В работе [3] они построены на основе аппроксимаций уравнений равновесия сплошного тела и являются равновесными, а в данной работе они построены на основе аппроксимаций полей перемещений и напряжений. Поэтому все вышеприведенные математические модели, в том числе и математические модели статической постановки задач, принадлежат классу смешанных постановок.

4. Анализ условий текучести и геометрических уравнений

Выражения $\varphi_k = \mathbf{f}_{0k}(\mathbf{C}_k) - \mathbf{f}_k(\sigma_k) \geq \mathbf{0}$, $\varphi_t = \mathbf{f}_{0t}(\mathbf{C}_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t) \geq \mathbf{0}$, входящие в математические модели задач, представляют собой дискретные условия текучести k -го элемента и t -й поверхности раздела элементов. Все составляющие этих условий определены зависимостями (9). Из них следует, что выбор разных аппроксимирующих функций пластических множителей приводит к разным выражениям дискретных условий текучести, соответствующих разным методам коллокаций [3,12].

Геометрические уравнения (14) конечноэлементной модели конструкции получены как условия стационарности дискретно описанного функционала \mathcal{S} . Однако возможны и другие способы учета и дискретизации геометрических уравнений. Если уравнения (3) линейны, то напряжения можно выразить через деформации и исключить из числа неизвестных задачи. В этом случае геометрические уравнения соблюдаются во всех точках конечного элемента. Если же геометрические уравнения конечных элементов нелинейны и необратимы, то они могут быть удовлетворены только в слабой форме:

$$\int_{V_k} [G_k(\mathbf{x})]^T \left\{ [d_k] \sigma_k(\mathbf{x}) + \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) + [\nabla \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))]^T \lambda_k(\mathbf{x}) - [\mathcal{A}]^T \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \right\} dV_k = \mathbf{0}, \quad (24)$$

где $[G_k(\mathbf{x})]$ – матрица весовых функций, зависящая от используемого метода коллокаций. Для метода коллокации в точке и метода Бубнова–Галеркина она состоит из подматриц $[G_{ki}(\mathbf{x})]$, соответствующих узлам $i = 1, 2, \dots, \xi$. После интегрирования получаются алгебраические уравнения совместности конечного элемента:

$$[\bar{D}_k] \sigma_k + \bar{\varepsilon}_{0k} + \varepsilon_{pk} - [\bar{A}_k]^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Выбор разных весовых функций, соответствующих разным методам коллокаций, приведет к разным выражениям матриц $[\bar{D}_k]$, $[\bar{A}_k]$ и векторов начальных и пластических деформаций элемента. Согласно методу коллокации в точке $[G_{ki}(\mathbf{x}_i)] = [E]$ для узловой точки i и $[G_{ki}(\mathbf{x}_j)] = [0]$ для всех остальных точек элемента. Тогда $[\bar{D}_k] = \text{diag}[d_k]$, $\varepsilon_{pk} = \{\varepsilon_{pk1}, \varepsilon_{pk2}, \dots, \varepsilon_{pk\xi}\}^T$, где $\varepsilon_{pki} = [\nabla \mathbf{f}_{ki}(\sigma_{ki})]^T \lambda_{ki}$, $\bar{\varepsilon}_{0k} \equiv \{\varepsilon_{0ki}\}$. Матрица $[\bar{A}_k]$ состоит из подматриц $[A_{ki}]^T = [A_k(\mathbf{x}_i)]^T$, где $[A_k(\mathbf{x})] = [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})]$. В этом случае геометрические уравнения элемента (25) выражаются совокупностью уравнений

$$[d_k] \sigma_{ki} + \varepsilon_{0ki} + [\nabla \mathbf{f}_{ki}(\sigma_{ki})]^T \lambda_{ki} - [A_{ki}]^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, \xi$$

и удовлетворяются лишь в узлах элемента. Используя метод коллокации в подобласти, полагаем $[G_k(\mathbf{x})] = [E]$. Тогда

$$\begin{aligned} [\bar{D}_k] &= \int_{V_k} [d_k] [H_k(\mathbf{x})] dV_k, & [\bar{A}_k] &= \int_{V_k} [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] dV_k, \\ \bar{\varepsilon}_{0k} &= \int_{V_k} \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k, & \varepsilon_{pk} &= \int_{V_k} [\nabla \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))]^T [H_{\lambda k}(\mathbf{x})] \lambda_k dV_k. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что геометрические уравнения (25), полученные с использованием двух методов коллокаций, отличаются от уравнений (14), построенных соответствующим методом. Лишь метод коллокации Бубнова–Галеркина с использованием весовых матриц $[G_k(\mathbf{x})] = [H_k(\mathbf{x})] = [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]$ приводит к геометрическим уравнениям, совпадающим с (14). Таким образом он дает наилучшую аппроксимацию геометрических уравнений.

5. Кинематические постановки задач в случае линейных условий текучести

В случае линейных условий текучести $[\Phi_x] \sigma_k(\mathbf{x}) \leq [\rho] C_k(\mathbf{x}) \in V_k$, $[\Phi_{\alpha}] \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) \leq [\rho_t] C_t(\mathbf{x}) \in S_t$ геометрические уравнения конечных элементов линейны, а $[\nabla \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))] = [\Phi_x]$, $[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))] = [\Phi_{\alpha}]$.

Поэтому из математических моделей (2) и (4) можно исключить напряжения и для дискретизации задач применять конечные элементы в перемещениях (совместные). Подставляя выражение

$$\sigma_k(\mathbf{x}) = [d_k]^{-1} \left\{ [\mathcal{A}]^T \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) - \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) - [\Phi_x]^T \lambda_k(\mathbf{x}) \right\} \quad (26)$$

в функционал задачи (2) и принимая аппроксимирующие функции перемещений, пластических множителей и параметров пластичности, после некоторых преобразований получаем дискретную кинематическую постановку задачи определения полных перемещений:

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [K] \mathbf{u} - \frac{1}{2} \lambda^T [K_\lambda] \lambda - \lambda^T \sigma_0 + \lambda^T [K_{u\lambda}] \mathbf{u} - \lambda^T [V] \mathbf{C} - \lambda_p^T [V_p] \mathbf{C}_p \rightarrow \max$$

при условиях

$$[\Phi_v]^T \lambda_v - [A_v]^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad [\Phi_u]^T \lambda_u - [A_u]^T (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \lambda_v \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_u \geq \mathbf{0}. \quad (27)$$

Диагональными блоками квазидиагональных матриц $[K]$, $[K_\lambda]$, $[K_{u\lambda}]$, $[V]$, $[V_p]$, $[\Phi_v]$ являются матрицы

$$\begin{aligned} [k_k] &= \int_{V_k} \left\{ [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] \right\}^T [d_k]^{-1} [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] dV_k, & [V_k] &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T [\rho] [H_{0k}(\mathbf{x})] dV_k, \\ [k_{\lambda k}] &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T [\Phi_x] [d_k]^{-1} [\Phi_x]^T [H_{\lambda k}(\mathbf{x})] dV_k, & [V_{pk}] &= \int_{S_i} [H_{\lambda t}(\mathbf{x})]^T [\rho_t] [H_{0t}(\mathbf{x})] dS_t, \\ [k_{uk}] &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T [\Phi_x] [d_k]^{-1} [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] dV_k, & [\Phi_{vt}] &= \int_{S_i} [H_{\lambda t}(\mathbf{x})]^T [\Phi_{tx}] [H_t(\mathbf{x})] dS_t. \end{aligned}$$

Здесь $[k_k]$ – общеизвестная матрица жесткости k -го элемента. Составляющими векторов внешних узловых сил \mathbf{F} , \mathbf{F}_0 и напряжений σ_0 являются векторы

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{0k}\} &= \int_{V_k} \left\{ [\mathcal{A}]^T [H_{uk}(\mathbf{x})] \right\}^T [d_k]^{-1} \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k, & \{\mathbf{F}_k\} &= \int_{S_k} [H_{uk}(\mathbf{x})]^T \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) dS, \\ \{\sigma_{0k}\} &= \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T [\Phi_x] [d_k]^{-1} \varepsilon_{0k}(\mathbf{x}) dV_k. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, после исключения вектора остаточных напряжений

$$\sigma_{rk}(\mathbf{x}) = [d_k]^{-1} \left\{ [\mathcal{A}]^T \mathbf{u}_{rk}(\mathbf{x}) - [\Phi_x]^T \lambda_k(\mathbf{x}) \right\} \quad (28)$$

и дискретизации смешанная постановка (4) задачи анализа остаточных перемещений и напряжений преобразуется в дискретную кинематическую постановку:

$$-\frac{1}{2} \mathbf{u}_r^T [K] \mathbf{u}_r - \frac{1}{2} \lambda^T [K_\lambda] \lambda + \lambda^T [K_{u\lambda}] \mathbf{u}_r - \lambda^T \{ [V] \mathbf{C} - [\Phi] \sigma_e \} - \lambda_p^T \{ [V_p] \mathbf{C}_p - [\Phi_p] \mathbf{p}_e \} \rightarrow \max$$

при условиях

$$[\Phi_p]^T \lambda_p - [A_p]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad \lambda_p \geq \mathbf{0}. \quad (29)$$

Диагональными блоками квазидиагональных матриц $[\Phi]$ и $[\Phi_p]$ являются матрицы

$$[\Phi_k] = \int_{V_k} [H_{\lambda k}(\mathbf{x})]^T [\Phi_x] [H_k(\mathbf{x})] dV_k, \quad [\Phi_t] = \int_{S_i} [H_{\lambda t}(\mathbf{x})]^T [\Phi_{tx}] [H_t(\mathbf{x})] dS_t$$

условий текучести конечных элементов и их поверхностей. Матрица $[\Phi_p]$ состоит из $[\Phi_v]$ и $[\Phi_u]$.

Математические модели (27) и (29) позволяют определить векторы перемещений и пластических множителей, на основе которых в дальнейшем могут быть определены функции напряжений с использованием формул (26) и (28). Преимущество математических моделей (27) и

(29) по сравнению с (12) и (21) состоит не только в том, что они содержат меньше неизвестных, но и в том, что геометрические уравнения соблюдаются во всех точках конечных элементов. В задачах (12), (13) и (21) они соблюдаются лишь в слабой форме (за исключением стержневых систем).

В представленных кинематических постановках задач неизвестными являются векторы перемещений и пластических множителей. Однако, как показано в работе [3] для равновесных моделей, в случае линейных условий текучести смешанные постановки (12) и (21) могут быть преобразованы в кинематические постановки задачи, в которых неизвестными являются лишь пластические множители. Например, добавив уравнения равновесия к ограничениям задачи (21), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} [A]\sigma_r + [A_p]\mathbf{p}_r &= \mathbf{0}, & [D]\sigma_r + [\Phi]^T\lambda - [A]^T\mathbf{u}_r &= \mathbf{0}, \\ [\Phi_p]^T\lambda_p - [A_p]^T\mathbf{u}_r &= \mathbf{0}, & \lambda \geq \mathbf{0}, & \lambda_p \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Решая ее относительно векторов пластических множителей, получаем зависимости:

$$\mathbf{u}_r = [H]\lambda + [H_v]\lambda_p, \quad \sigma_r = [G]\lambda + [G_v]\lambda_p, \quad \mathbf{p}_r = [G_p]\lambda + [G_{pv}]\lambda_p. \quad (31)$$

Здесь матрицы

$$\begin{aligned} [H] &= \left\{ [\bar{K}]^{-1} - [\bar{K}]^{-1}[A_p][K_p]^{-1}[A_p]^T[\bar{K}]^{-1} \right\} [A][D]^{-1}[\Phi]^T, & [H_v] &= [\bar{K}]^{-1}[A_p][K_p]^{-1}[\Phi_p]^T; \\ [G] &= [D]^{-1}[A]^T[H] - [D]^{-1}[\Phi]^T, & [G_v] &= [D]^{-1}[A]^T[H_v] = [D]^{-1}[A]^T[\bar{K}]^{-1}[A_p][K_p]^{-1}[\Phi_p]^T; \\ [G_p] &= [K_p]^{-1}[A_p]^T[\bar{K}]^{-1}[A][D]^{-1}[\Phi]^T, & [G_{pv}] &= -[K_p]^{-1}[\Phi_p]^T, \end{aligned}$$

где

$$[\bar{K}] = [A][D]^{-1}[A]^T, \quad [K_p] = [A_p]^T[\bar{K}]^{-1}[A_p].$$

Подстановкой решения (31) в функционал задачи (21) экстремальная задача с ограничениями сводится к задаче максимизации только с условиями неотрицательности пластических множителей:

$$-\frac{1}{2}\lambda^T[T]\lambda - \frac{1}{2}\lambda_p^T[T_p]\lambda_p - \lambda^T[T_\lambda]\lambda_p - \lambda^T\{[V]C - [\Phi]\sigma_e\} - \lambda_p^T\{[V_p]C_p - [\Phi_p]\mathbf{p}_e\} \rightarrow \max \quad (32)$$

при условиях

$$\lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_p \geq \mathbf{0}.$$

Матрицы

$$[T] = [G]^T[D][G], \quad [T_p] = [G_v]^T[D][G_v], \quad [T_\lambda] = [G]^T[D][G_v].$$

Преимущество математической модели (32) по сравнению с моделью (29) в том, что она содержит меньше неизвестных. Однако имеет и недостаток – геометрические уравнения конечных элементов, за исключением стержневых систем, соблюдаются только в слабом (интегральном) виде. С применением равновесных конечных элементов в работе [3] построена равновесная кинематическая постановка задачи анализа остаточных параметров НДС. Модель (32) отличается от нее только тем, что является не равновесной, а геометрически совместной.

Аналогичным образом можно преобразовать и статические постановки задач. Например, добавив геометрические уравнения к ограничениям задачи (22), получим систему ограничений – равенств (30). Тогда с учетом ее решения (31) статическая постановка (22) задачи анализа остаточных напряжений выражается через кинематические величины:

$$\frac{1}{2}\lambda^T[T]\lambda + \frac{1}{2}\lambda_p^T[T_p]\lambda_p + \lambda^T[T_\lambda]\lambda_p \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{aligned} -[\Phi]\{[G]\lambda + [G_v]\lambda_p\} &\geq [\Phi]\sigma_e - [V]C, & \lambda \geq 0, \\ -[\Phi_p]\{[G_p]\lambda + [G_{pv}]\lambda_p\} &\geq [\Phi_p]p_e - [V_p]C_p, & \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Число ограничений и неизвестных в этой задаче меньше по сравнению с задачей (22). Все-таки реализация кинематической постановки (32) проще.

Аналогичным образом могут быть преобразованы и математические модели задачи определения полных перемещений и напряжений. Однако при этом получаются более сложные задачи. Поэтому для определения пластических множителей целесообразно решить задачу (32). Для расчета перемещений и напряжений далее используются формулы (31). Это свидетельствует о том, что формулировка задач с соблюдением двойственных связей позволяет значительно упростить алгоритм решения задач упругопластического анализа.

6. Пример построения и применения смешанных и совместных конечных элементов

Анализ НДС упругопластических конструкций с применением совместных конечных элементов иллюстрируется на примере расчета простой двухпролетной балки постоянного сечения (рис. 1) под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p = 17M_0/54$, где M_0 — предельный момент ее поперечного сечения. Требуется определить распределение изгибающих моментов и перемещений (прогибов) балки. Интенсивность нагрузки $p = 17M_0/54$ принята с таким расчетом, чтобы: во-первых, имели место пластические деформации и, во-вторых, выполнялось условие $p \leq p_0$, где p_0 — интенсивность предельной нагрузки.

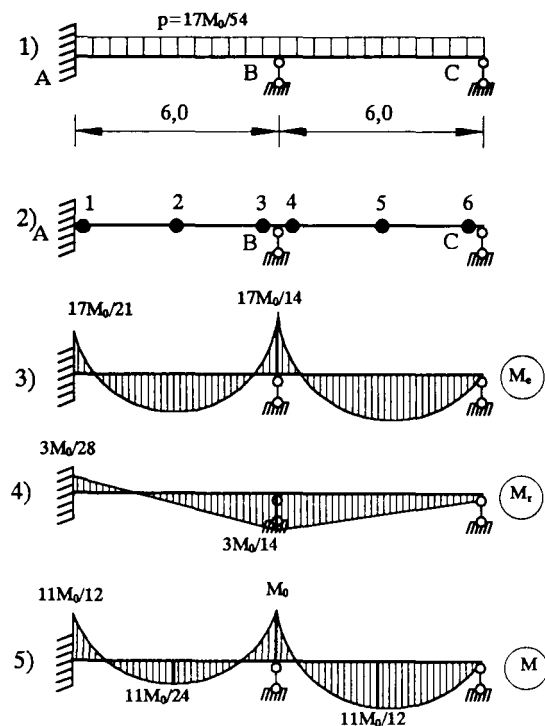


Рис. 1. Расчетная схема и результаты расчета балки

Поэтому вначале кинематическим методом предельного равновесия исследуется предельное состояние балки и определяется величина предельной нагрузки $p_0 = 0,3238M_0$. Ее предельное состояние достигается при образовании двух пластических шарниров: над средней опорой и во втором пролете на расстоянии $x = 3,515m$ от средней опоры. Для решения задачи можно использовать широко известный стержневой элемент с линейным распределением изгибающих моментов и кубическим распределением прогибов, содержащим четыре степени свободы. Однако при этом необходимо делить каждый пролет балки на несколько конечных элементов. Так как изгибающие моменты в балке распределяются по закону квадратичной параболы, целесообразнее построить элемент более высокого порядка.

Строим новый конечный элемент с параболическим распределением изгибающих моментов и функцией перемещений четвертой

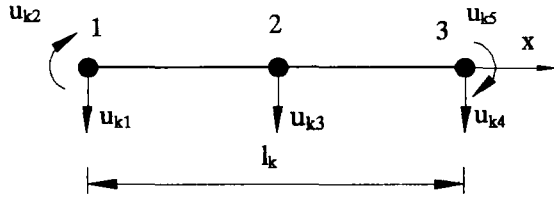


Рис. 2. Конечный элемент

степени. Элемент имеет три узла и пять степеней свободы (рис. 2). Принимаются функции

$$M_k(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = \{\mathbf{h}_k(x)\}^T \mathbf{a}_k,$$

$$\lambda_k(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 = \{\mathbf{h}_k(x)\}^T \mathbf{b}_k,$$

$$u_k(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 = \{\mathbf{h}_{uk}(x)\}^T \mathbf{c}_k.$$

С использованием граничных условий

$$M_{ki} = \{\mathbf{h}_k(x_i)\}^T \mathbf{a}_k, \quad i=1,2,3; \quad \lambda_{ki} = \{\mathbf{h}_k(x_i)\}^T \mathbf{b}_k, \quad i=1,2,3;$$

$$u_{ki} = \{\mathbf{h}_{uk}(x_i)\}^T \mathbf{c}_k, \quad i=1,3,4; \quad u_{ki} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\right] \{\mathbf{h}_{uk}(x_i)\}^T \mathbf{c}_k, \quad i=2,5$$

неизвестные коэффициенты \$a_i, b_i, c_i\$ соответствующих полиномов выражаются через узловые изгибающие моменты \$\{\mathbf{M}_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}\}^T\$, обобщенные перемещения \$\{\mathbf{u}_k\} = \{u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k5}\}^T\$ и пластические множители \$\{\lambda_k\} = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k3}\}^T\$, а аппроксимирующие функции конечного элемента преобразуются к следующим выражениям:

$$M_k(x) = \sum_{i=1}^3 H_{ki}(x) M_{ki} = \{\mathbf{H}_k(x)\}^T \mathbf{M}_k, \quad u_k(x) = \sum_{i=1}^5 H_{uki}(x) u_{ki} = \{\mathbf{H}_{uk}(x)\}^T \mathbf{u}_k, \quad \lambda_k(x) = \{\mathbf{H}_k(x)\}^T \lambda_k. \quad (34)$$

Здесь функции формы

$$H_{k1}(x) = 1 - \frac{3x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2}, \quad H_{k2}(x) = \frac{4x}{l_k} - \frac{4x^2}{l_k^2}, \quad H_{k3}(x) = -\frac{x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2};$$

$$H_{uk1}(x) = 1 - \frac{11x^2}{l_k^2} + \frac{18x^3}{l_k^3} - \frac{8x^4}{l_k^4}, \quad H_{uk2}(x) = x - \frac{4x^2}{l_k} + \frac{5x^3}{l_k^2} - \frac{2x^4}{l_k^3},$$

$$H_{uk3}(x) = \frac{16x^2}{l_k^2} - \frac{32x^3}{l_k^3} + \frac{16x^4}{l_k^4}, \quad H_{uk4}(x) = -\frac{5x^2}{l_k^2} + \frac{14x^3}{l_k^3} - \frac{8x^4}{l_k^4}, \quad H_{uk5}(x) = \frac{x^2}{l_k} - \frac{3x^3}{l_k^2} + \frac{2x^4}{l_k^3}.$$

Дискретная модель балки строится разделением ее на два конечных элемента, соединенных в узле \$B\$ (рис 1.2). Согласно граничным условиям вертикальные перемещения узлов \$i = 1, 3, 4, 6\$ равны нулю и изгибающий момент \$M_c = 0\$. Поэтому неизвестными задачи являются векторы перемещений \$\mathbf{u} = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{22}, u_{23}, u_{25}\}^T\$, изгибающих моментов \$\{\sigma\} \equiv \{\mathbf{M}\} = \{M_1, M_2, \dots, M_6\}^T\$ и \$\mathbf{p} = \{M_a, M_b\}^T\$ и пластических множителей \$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6\}^T\$, \$\lambda_p = \{\lambda_a, \lambda_b\}^T\$. Решение задачи можно определить согласно любой выше представленной математической модели.

Рассмотрим условия текучести, геометрические уравнения \$k\$-го элемента и дискретной модели балки. Интегральное условие текучести конечного элемента выражается неравенством

$$[\Phi_k] \mathbf{M}_k = \frac{l_k}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0,5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \\ M_{k3} \end{bmatrix} \leq \frac{M_0 l_k}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_k.$$

Для узлов \$A\$ и \$B\$ должны соблюдаться условия текучести \$-M_a \leq M_0\$ и \$-M_b \leq M_0\$. Геометрическая совместность \$k\$-го элемента описывается уравнением

$$\frac{l_k}{15EJ_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0,5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \\ M_{k3} \end{bmatrix} + \frac{l_k}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0,5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \\ \lambda_{k3} \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 31/l_k & 14 & -32/l_k & 1/l_k & 1 \\ -32/l_k & 2 & 64/l_k & -32/l_k & -2 \\ 1/l_k & -1 & -32/l_k & 31/l_k & -14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \\ u_{k4} \\ u_{k5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $[D_k]$ и $[A_k]^T$ определяются по формулам (10) и (11). Геометрические уравнения узлов таковы:

$$-\lambda_a + u_{12} = 0, \quad -\lambda_b - u_{15} + u_{22} = 0, \quad \text{где} \quad \lambda_a \geq 0, \quad \lambda_b \geq 0.$$

Заданная функция изгибающих моментов удовлетворяет уравнению

$$M_k(x) = \frac{1}{EJ_k} \left\{ [\mathcal{A}]^T u_k(x) - [\Phi_x]^T \lambda_k(x) \right\}. \quad (35)$$

Поэтому построенный конечный элемент является совместным и решение задачи можно определить согласно совместной математической модели (29) без предварительной аппроксимации изгибающих моментов, которые после решения задачи (29) могут быть определены по формуле (35). Все-таки для решения задачи целесообразнее использовать математическую модель (32).

Получены следующие результаты расчета: а) множители $\lambda_a = 0$, $\lambda_b = 0.75M_0/EJ$; $\lambda_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, 6$; б) векторы перемещений $\mathbf{u}_r = \{0, 0.2411, -0.3214, 0.4286, 0.4821, -0.2143\}^T M_0/EJ$ и $\mathbf{u} = \{0, 1, 0.0833, 3.0625, 1.8333\}^T M_0/EJ$; в) векторы изгибающих моментов $\mathbf{M}_r = \{-0.1071, 0.0536, 0.2143, 0.2143, 0.1071, 0\}^T M_0$ и $\mathbf{M} = \{-0.9166, 0.4583, -1, -1, 0.9166, 0\}^T M_0$. На рис. 1.3–1.5 показаны эпюры упругих, остаточных и полных изгибающих моментов. Численные результаты совпадают с результатами аналитического решения балки.

6. Заключение

На основе экстремальных энергетических принципов и смешанных конечных элементов построены дискретные смешанные и статические постановки задач анализа полных и остаточных перемещений и напряжений упругопластических конструкций при разных видах нагружения. Они представляют собой двойственную пару задач математического программирования. В них учитываются возможные разрывы перемещений и диссипация энергии на поверхностях раздела конечных элементов. Представлены дискретные выражения условий текучести и геометрических уравнений. Показано, что, во-первых, метод Бубнова–Галеркина дает наилучшую аппроксимацию геометрических уравнений, пластических деформаций, а заодно и энергии деформаций, в том числе диссипативной энергии. Во-вторых, применение точечных условий текучести в двойственных постановках задач означает применение различных способов коллокаций для аппроксимации упругих и пластических деформаций. Упругие деформации и упругая энергия аппроксимируются методом Бубнова–Галеркина, а пластические деформации – методом точечной коллокации. Чтобы избежать такое несоответствие и повысить точность результатов расчета для дискретизации функциональных и дифференциальных зависимостей, следует применять метод коллокации Бубнова–Галеркина.

Для случая линейных условий текучести построены также кинематические постановки задачи анализа остаточных перемещений и напряжений. Неизвестными в них являются лишь пластические множители. Получены зависимости остаточных перемещений и напряжений от пластических множителей. Смешанные и кинематические постановки задач соответствуют экстремальному

principiu o minimume полной энергии деформаций и позволяют определить нижнюю оценку параметров НДС. Вместе с равновесными математическими моделями, представленными в [3], они позволяют определить двухстороннюю оценку НДС упругопластических конструкций и, таким образом, позволяют оценить точность численных результатов расчета. Построение и применение смешанных и совместных конечных элементов иллюстрируется примером анализа НДС балки.

Разработанная методика учета разрывов функций перемещений применительно к простому нагружению может быть использована и в других задачах упругопластического анализа, а также для более сложного повторно-переменного или подвижного нагружения.

Литература

1. А.А. Чирас. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. Вильнюс: Мокслас, 1982. 112 с.
2. А.А. Чирас. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс: Мингис, 1971. 123 с.
3. С. Каланта. Двойственные математические модели задач анализа упругопластических конструкций с разрывными полями перемещений // Statyba (Строительство), № 3(3), Вильнюс: Техника, 1995, с. 5–29.
4. А.В. Сокас. Определение напряженно-деформированного состояния идеально упругопластических сферических оболочек при несимметричном простом нагружении до достижения пластического разрушения. Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук, Вильнюс, 1986. 16 с.
5. Ю.Ю. Агкочюнас. Расчет упругопластических систем при повторных нагружениях. Вильнюс: Изд-во науки и энциклопедий, 1994. 150 с.
6. T. Belytschko, M. Velebit. Finite element method for elastic plastic plates // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 98, № 1, 1972, p. 227–242.
7. T. Belytschko, P.G. Hodge. Plane stress limit analysis by finite element // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 96, № 6, 1970, p. 931–944.
8. A. Biron, G. Charleux. Limit analysis of axisymmetric pressure vessel intrsections of arbitrary shape // Int. J. Mech. Sci., 1972, 14, № 1, 1972, p. 25–41.
9. S. Turgeman, J. Pastor. Limit analysis: a linear formulation of the kinematic approach for axisymmetric mechanics problems // J. Int. Numer. and Anal. Meth. Geomech., 6, № 1, 1982, p. 109–128.
10. С.А. Каланта. Двойственные задачи предельного равновесия с разрывами скоростей перемещений // Statyba (Строительство), № 2(2), Вильнюс: Техника, 1995, с. 20–25.
11. П. Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с. (пер. с англ.)
12. S. Kalanta. Takumo sąlygos baigtinių elementų modeliams // Proceedings of 4th Int. Conf. "Modern building materials, structures and techniques", vol. III. Vilnius: Technika, 1995, p. 260-265.

Įteikta 1996 03 28

MIŠRIEJI IR DARNIEJI BAIGTINIAI ELEMENTAI TAMPRIŲ-PLASTINIŲ KONSTRUKCIJŲ ANALIZĖS UŽDAVINIUOSE

S. Kalanta

S a n t r a u k a

Nagrinėjami idealiai tamprių-plastinių konstrukcijų, veikiamų ivairių išorinių poveikių (apkrovos, išankstinio deformavimo, atramų sėdimo), įtempimų-deformacijų būvio analizės uždaviniai. Juose nustatomi konstrukcijos poslinkiai ir įtempimai bei jų liekamosios dalys. Remiantis ekstreminiais energetiniais principais, dualumo teorija ir baigtinių elementų metodu sudaryti dualūs bendri ir diskretiniai šių uždavinių matematiniai modeliai. Jų naujumas - įvertinami galimi poslinkių funkcijų trūkiai ir energijos disipacija plastiniuose paviršiuose tarp baigtinių elementų.

Panaudojant mišrųjį energetinį funkcionalą ir mišriuosius baigtinius elementus, pirmiausia sudarytos pagrindinių priklausomybių (geometrinių lygčių, takumo sąlygų) diskretinės išraiškos ir mišrūs diskretiniai uždavinių matematiniai modeliai. Jie atitinka pilnutinės deformacijų energijos minimumo principui. Duali statinė uždavinių formuluotė sudaroma Lagranžo daugiklių metodu ir atitinka papildomosios energijos minimumo principui. Tiesinių takumo sąlygų atveju, panaudojant mišrius ir geometriškai darnius baigtinius elementus, sudarytos uždavinių kinematinės formuluotės, kuriose nežinomieji yra tik kinematiniai dydžiai. Sudaryti matematiniai modeliai leidžia nustatyti įtempimų ir poslinkių apazines

reikšmes. Parodyta, kad iš visų klasikinių kolokacijos metodų, kurie gali būti naudojami geometrinių lygčių ir takumo sąlygų diskretizacijai, tiksliausiai geometrinės lygtys, plastinės deformacijos ir energijos disipacija aproksimuojamos Bubnovo-Galiorkino metodu. Šijos skaičiavimo pavyzdžiu iliustruojamas mišraus ir darnaus baigtinio elemento sudarymas ir panaudojimas tamprių-plastinių konstrukcijų analizei.

MIXED AND COMPATIBLE FINITE ELEMENTS IN THE ANALYSIS PROBLEM OF ELASTOPLASTIC STRUCTURES

S. Kalanta

S u m m a r y

A problem of ideal elastoplastic structures stress-strain field determination is considered. The dual general and discrete mathematical models of analysis problem are made on the basis of the extremal energy principles and finite element method. In these models the possible discontinuity of displacements and the dissipation of energy in the place of those discontinuities, also the different external effects (load, initial strains and support settlements) are estimated.

At first, on the basis of the mixed functional and mixed finite elements the discrete expressions of fundamental relationships (geometric equations, yield conditions) and the discrete mathematical model of mixed formulation of the problem are made. This mathematical model corresponds to the minimum total energy principle for a kinematically admissible displacements. The dual static formulation of the problem is obtained by Lagrange's multipliers method; this corresponds to the minimum complementary energy principle. The kinematic formulation of the problem is obtained in the case of linear yield conditions. These mathematical models permit to determine the lower values of the stress and displacements of structures. It has shown that the approximation of geometric equations and yield conditions by Bubnov-Galiorkin's collocation method gives the more accurate results.